

以学生为中心，开展实变函数课程教学

陈敏

(东华大学理学院应用数学系, 上海 201620)



摘 要: 传授知识是课程教学的重要职责之一, 发现知识、创造知识, 会应用知识解决实际问题才是我们培养学生的目的。以学生为中心的主动式教学方式就是要以培养学生的兴趣为主, 让学生在兴趣的驱使下自主获取知识。本文结合实变函数课程的实践教学, 通过多种形式的教学方法和教学手段激发学生学习兴趣, 使其积极主动学习, 从而培养和提高学生综合能力。

关键词: 以学生为中心; 教学; 实变函数; 测度; L 积分

一、引言

德国在两百年前的教育宣言曾经如此说到: 教育的目的, 不是培养人们适应传统的世界, 不是着眼于实用性的知识和技能, 而是要唤醒学生的力量, 培养他们自我学习的主动性, 抽象的归纳力和理解力, 以便使他们在目前无法预料的种种未来局势中, 自我做出有意义的选择。教育是以人为最高的目的, 接受教育是人的最高价值的体现。“实变函数”^[1]是高等学校数学与应用数学专业的重要专业基础课程之一, 具有承上启下的作用。它既是数学分析理论的继续、发展、深化和拓广, 又是泛函分析、偏微分方程、概率论与随机过程等课程的基础。“实变函数”是一门极精致的数学, 具有高度的抽象性, 对培养数学专业学生的数学素养与思维能力起着关键的作用。但是“实变函数”被认为是数学专业本科阶段最难学的课程之一。究其原因, 学生的知识面窄, 定向思维已成习惯。学生习惯于演绎推理证明, 对于发散性思维、构造性证明很陌生。如何使学生学好这门课程? 改变被动接受方式, 实现主动探究知识, 体现“以学生为中心”的基本教育思想。本文针对我校“实变函数”课程的特点, 结合多年的教学实践, 从学生的角度设想如何学习“实变函数”, 对该课程的教学方法进行了初步的研究, 总结了适合本课程的教学方法。不妥之处请同行指正。

二、研究学生, 改进教学方法

了解学生, 掌握学生现有的知识结构、水平和能力等情况。在学习过程中会遇到哪些困难? 产生哪些错误的判断? 进而探究如何引导学生学习, 才能让学生学得主动, 激发学生对课程的学习兴趣、学习热情, 充分调动学生积极地投入到学习中去。变被动接受为积极思维, 主动获取知识。教师的角色由一味的知识传授者相应地也要转变为教学的指导者、管理者、激励者和资源。

1. 开展课堂探讨

数学系的本科生进入高年级后具备了一定的数学基础知识和数学素养, 有一定的逻辑思维能力, 在教学中可以采用探讨式教学。问题以学生提出为主也可以由任课教师设计问题。例如

为什么要引入 L 积分, 学生在学习“实变函数”时大多会产生这样的疑问。通过查阅资料、阅读文献后, 对这一问题学生们会发现 R 积分的弱点和缺陷, 黎曼 (Riemann) 分划呆板, 它要求将定义域分成区间, 这种方法对连续函数有效, 但是对狄利克雷 (Dirichlet) 函数就不可积。但是许多 R 不可积的函数, 对 L 积分都是可积的。这又是怎么回事? 我们会进一步引导学生继续寻找问题的关键点。引入 L 积分构造与 R 积分构造的不同点, 同时结合数学史给学生介绍勒贝格本人及其贡献。勒贝格对黎曼积分的改造思路。引入测度的产生和定义以及可测集。再提出问题 L 积分有哪些性质? 最后如何得到积分极限定理。通过提问, 学生查阅资料、思考、讨论、回答, 将整个 L 积分的产生原因、构造、性质、定理、应用等知识点梳理清楚, 让学生看到清晰的脉络, 做到心中有数, 真正体会到 L 积分的优越性。其实勒贝格积分的产生过程也向学生展示了创新思维过程。又比如在可测函数列的几种收敛性的学习中, 对几乎处处收敛、依测度收敛、近一致收敛和一致收敛这些概念, 教师在介绍完基本概念、知识点和勒贝格定理、叶果洛夫定理、叶果洛夫逆定理后, 学生提出问题: 这些概念和定理的联系与区别是什么? 课后大家分小组进行分析、研究。将研究结果在课堂上讨论, 师生互动, 说明它们之间的联系与区别, 举出反例。指导学生理解在有限可测集上与在一般可测集上这些收敛性的异同。课堂讨论能使将所学到的知识联系起来, 加强对细节内容的理解, 引导他们发现、总结规律。讨论的最大作用在于教给学生的过程, 即思考。培养他们发现问题、解决问题的能力, 使学生慢慢养成独立学习的习惯。增强他们的学习动机, 引导学生克服学习困难, 为后期学生的专业论文的撰写打下基础。

2. 注意与数学分析的联系和类比

人的认识过程总是由已知走向未知。对已知理解得透彻, 对新知就掌握得顺利, 在学习新的知识点时, 就会降低难度, 增强学习的信心。“实变函数”与“数学分析”有着紧密的联系, 有些地方很类似。在教学中引导学生将“实变函数”的相关内容与数学分析的有关知识进行联系与对比, 往往能取得事半功倍的效果。连续函数这一概念在“数学分析”中给出了严格的定义, 也有直观的几何意义。在“实变函数”中我们要强调这一概念。在引入可测函数这一概念, 与连续函数进行比较。连续函数对极限运算不封闭, 而可测函数在极限运算下是封闭的。所以极限运算对可测集、可测函数可以畅通无阻地进行运算。我们通过讨论狄利克雷函数的可积性, 将 R 积分与 L 积分进行类比, 说明 L 积分在构造方式上更为一般、合理与实用, 从而使某些 R 不可积的“较差的”函数做到 L 可积。进一步介绍 L 积分理论时, 多采用对比、联想的方法, 原来在 R 积分理论中的性质和定理在 L 积分中是否仍成立? 通过学习同学们会发现 L 积分的优越性, 从而感悟到“实变函数”这门课程的魅力。

3. 运用通俗化的教学语言

数学是严谨的。在实变函数的教学中概念和定理的叙述都是严密的、高度抽象的。在不违背原则的前提下, 我们尝试运用直白、通俗的语言来帮助同学理解概念和定理往往收到事半功倍的效果。例如“几乎处处”这个概念除了给出严密的数学语言, 我们给出了“差不多”的这一解释。我们引用英国数学家李特尔伍德 (J. E. Littlewood) 的一段精辟的论述: “关于实变函数论需要了解的范围并不像有时候想的那样大。有这样三条原理可粗略地表述如下: 任何可测集差不多就是 (开) 区间的有限并; 任何可测函数差不多就是连续的; 任何收敛的可测函数列差不多就是一致收敛的。”(实变函数论中的) 大量结论都是这些思想的直觉的应用。学生掌

握了它们，当需要用到实变函数论的时候就有能力处理大多数问题。又比如在讲授集合的势的概念时，学生对可数集中元素的个数与不可数集中元素个数之间的大小关系 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ 觉得很抽象。我们就假设可数集的个数是金茂大厦中一个房间中的一粒尘埃，那么不可数集的个数就是金茂大厦占据的整个空间的尘埃颗粒总数。通过这样生动形象的比喻，学生对这样的数量关系马上就有了感性的认识，继而对无限集的基数运算也能较快地接受和理解。

4. 运用图表直观地解释内容

在介绍 \mathbf{R}^n 空间的点集时，对于几种不同类型的点：内点、界点、外点、聚点和孤立点，学生在掌握其概念时容易混淆。对于一个给定的集 E 来讲， \mathbf{R}^n 中的点可以分为 E 的内点、界点、外点三种，又可以分为 E 的聚点、孤立点、外点三种。通过图 1 同学就可以对这些概念一目了然了，熟悉它们之间的关系。又如在单调函数、有界变差函数和绝对连续函数之间的关系时，我们画出如图 2 的图表，通过图 2 学生对这几类函数的关系就十分清楚了。

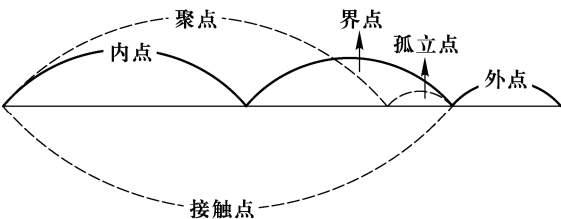


图 1

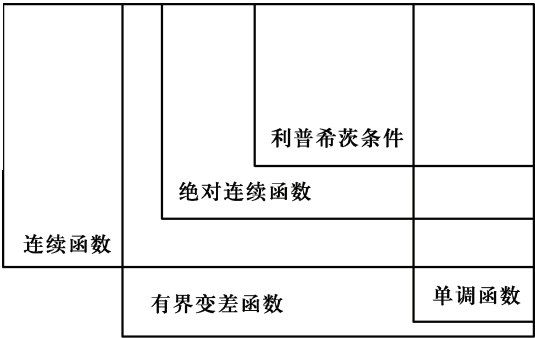


图 2

三、重视与学生交流

在“以学生为中心”的教学理念下，我们更重视与学生的交流。教师作为知识信息的传递者，同时也要及时、准确地接受学生的反馈信息，教学相长（教师的教与学生的学可以相互促进）。利用学生反馈信息可了解学生对教学的现状的满意程度，及时改进教学中存在的不足，对学生不理解的知识内容可进行个别指导或大面积辅导，修正教学计划，提高教学效果。我们采用的交流形式有：课堂提问、问卷调查、开座谈会、电子邮箱、QQ 等方式。在课程中期的问卷调查主要针对学生在学习过程中遇到困难，在课程末期的问卷调查主要是统计学习本课程

前后思维方法的差异和收获。选择代表各个层次的学生进行座谈会，获得学生对课程学习的情况。学生可以随时将学习上遇到的问题发邮件给任课教师，教师及时回复，师生互动交流。做到关心学生，深入学生，与学生相处融洽，真正了解学生的需求，掌握学生的情况，为今后组织设计教学获取第一手真实资料。另外我们在网上收集优秀的“实变函数”教学视频，引导学生在课前、课后主动地去观看，博采百家之长。

四、改变考核形式

我们对传统的考核形式做了适当的调整。首先在题型上不再以证明题为主，改为判断题、选择题、简答题，结合一定比例的证明题。这样可以避免一旦学生证明题做不出就全军覆没的情况出现。其次将一次期末考试定成绩改为增加一次期中考试，将两次考试成绩按照一定比例再结合平时分作为学生的最后综合成绩。通过两次考试分散知识点，降低难度，减轻学生期末复习的负担。实践证明适当的改变考试形式有助于提高学生的学习成绩，提高学生的学习的信心。

五、结语

通过对“实变函数”的学习不仅能够丰富学生现代分析的知识结构，而且可以大大提高学生的抽象思维能力、逻辑推理能力和分析解决问题的能力，培养学生的创新意识、拓展学生的创新思维、提高学生的创新能力。本文就以学生为中心，针对实变函数课程的教学实践总结了一些教学方法。需要指出的是，这些方法并不完善，还会出现各种问题。还要根据教学实践不断调整、不断完善。

参考文献

- [1] 邓东皋，常心怡. 实变函数简明教程. 北京：高等教育出版社，2005.